Onde non plane dans un tuyau sonore.

Un tuyau sonore orienté selon Ox a une section carrée ($0 < y < a$ et $0 < z < a$). On travaille à des fréquences pour lesquelles a n'est plus négligeable devant la longueur d'onde et l'on étudie la possibilité d'ondes stationnaires non planes.

On pose avec les notations du cours :

$$p(x, y, z, t) = f(y)\, g(z)\, \sin(k\, x)\, \sin(\omega\, t)$$

Question 1 :
Calculer la vitesse acoustique $\overrightarrow{u}$ de cette onde.

Une des relations qui lient la pression acoustique p et la vitesse acoustique $\overrightarrow{u}$ est (*cf* cours avec les mêmes notations) :

$$\mu_0 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$$

d'où les calculs suivants :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mu_0} \left| \begin{array}{l} k\, f(y)\, g(z)\, \cos(k\, x)\, \sin(\omega\, t) \\ f'(y)\, g(z)\, \sin(k\, x)\, \sin(\omega\, t) \\ f(y)\, g'(z)\, \sin(k\, x)\, \sin(\omega\, t) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\mu_0\, \omega} \left| \begin{array}{l} k\, f(y)\, g(z)\, \cos(k\, x)\, \cos(\omega\, t) \\ f'(y)\, g(z)\, \sin(k\, x)\, \cos(\omega\, t) \\ f(y)\, g'(z)\, \sin(k\, x)\, \cos(\omega\, t) \end{array} \right.$$

Question 2 :
Quelle est la condition imposée à la vitesse par les parois ? Qu'en déduit-on pour les fonctions f et g ?

Sur les parois, la vitesse doit être tangentielle et ne peut pas avoir de composante normale. Donc pour les plans $y = 0$ et $y = a$, u_y doit s'annuler, ce qui impose $f'(0) = f'(a) = 0$. Comme pour les cordes vibrantes, on peut considérer f', définie entre 0 et a, comme restriction d'une fonction impaire $2\,a$-périodique et donc f comme restriction d'une fonction paire $2\,a$-périodique. On peut donc écrire

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \cos\left(m\, \pi\, \frac{y}{a}\right)$$

ou encore, à un changement de notation près pour le terme constant,

$$f(y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \cos\left(m\, \pi\, \frac{y}{a}\right)$$

De même

$$g(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n \cos\left(n\, \pi\, \frac{z}{a}\right)$$

Question 3 :
On s'intéresse au «mode m, n» pour lequel $f(y) = p_{max} \cos\left(m\, \pi\, \frac{y}{a}\right)$ et $g(z) = \cos\left(n\, \pi\, \frac{z}{a}\right)$. Trouver la relation de dispersion liant k et ω.

On a donc

$$p(x, y, z, t) = p_{max} \cos\left(m\, \pi\, \frac{y}{a}\right) \cos\left(n\, \pi\, \frac{z}{a}\right) \sin(k\, x)\, \sin(\omega\, t)$$

On sait (cf cours) que p vérifie l'équation d'alembert

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega^2}{c^2}\,p_{max}\,\cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)\,\cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) = {}&\\
&-k^2\,p_{max}\,\cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)\,\cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)\\
&-\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2\,p_{max}\,\cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)\,\cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)\\
&-\left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2\,p_{max}\,\cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)\,\cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)
\end{aligned}$$

soit après simplifications

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

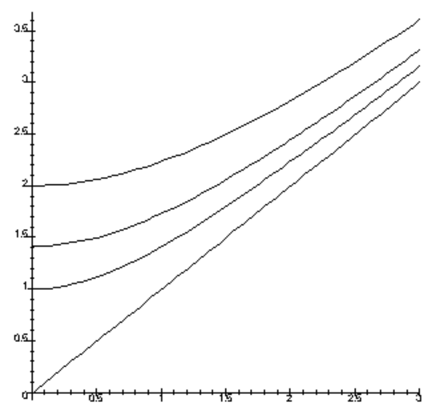
qu'on peut réécrire

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

ce qui prouve que pour m et n données k^2 est négatif, donc k imaginaire, donc le phénomène amorti si $\omega < \omega_c = \frac{\pi\,c}{a}\,\sqrt{m^2+n^2}$; chaque mode a donc un comportement passe-haut.

Question 4 :

On trace les courbes ω en fonction de k avec les grandeurs «réduites» $X = \dfrac{k\,a}{\pi}$ en abscisse et $Y = \dfrac{a\,\omega}{\pi\,c}$ en ordonnée (cf figure). Associer à chacune des courbes les premiers modes, soit les modes {0,0},{0,1},{1,0},{1,1},{2,0} et {0,2}.



De

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

on tire

$$\frac{\omega^2\,a^2}{\pi^2\,c^2} = \frac{a^2\,k^2}{\pi^2} + m^2 + n^2$$

$$Y^2 = X^2 + m^2 + n^2$$

Pour $m = n = 0$, on a donc $Y + X$, c'est la droite du bas ; pour les autres courbes (des hyperboles en fait), le point le plus simple à localiser est le celui de coordonnées $X = 0$ et $Y = \sqrt{m^2 + n^2}$. On reconnaît de bas en haut :

- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = 1$ obtenue pour $(m, n) = (1, 0) \quad \text{ou} \quad (0, 1)$
- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{2}$ obtenue pour $(m, n) = (1, 1)$
- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = 2$ obtenue pour $(m, n) = (2, 0) \quad \text{ou} \quad (0, 2)$

Question 5 :

On considère un tuyau d'orgue à section carré de côté a et de longueur L, ouvert à ses deux extrémités. A quelle condition émet-il un son harmonieux, c'est-à-dire n'émettant que des multiples d'un fondamental audible par l'oreille humaine (dans la plage 20 Hz-20 kHz) ?

Les deux extrémités sont des nœuds de pression, donc pour le fondamental $L = \lambda/2$ et pour l'harmonique de rang q, $L = q\,(\lambda/2)$. d'où

$$k_q = \frac{2\,\pi}{\lambda_q} = q\,\frac{\pi}{L}$$

A chaque valeur de q, correspond un point sur chacune des courbes représentant un mode. Les points obtenus pour le mode (0,0) sont équidistants et correspondent aux solutions classiques pour lesquelles les fréquences sont multiples de la plus basse, les sons sont harmonieux. Pour les points relatifs aux autres modes, les fréquences n'ont pas de rapport simple avec le fondamental du mode (0,0), ces sons sont inharmonieux. Il convient donc de les rendre inaudibles, en les plaçant dans le domaine des ultrasons. Comme le point le plus bas de ces courbes est celui du mode (0,1) avec $X = 0$ correspondant à $Y = 1$ soit $\omega = \frac{\pi\,c}{a}$ ou encore $f = \frac{c}{2\,a}$, il suffit que cette fréquence soit supérieure à $f_m = 20\,\text{kHz}$ limite supérieure de la plage des sons audibles, soit

$$\frac{c}{2\,a} > f_m \qquad \text{d'où} \quad a < a_{max} = \frac{c}{2\,f_m}$$

Avec $c \approx 350\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, on tire $a_{max} \approx 9\,\text{mm}$.

Remarque : ne pas ici se laisser tenter par trop de rigueur, la plus petite valeur de ω hors du mode (0,0) est obtenue pour le mode (1,0) et pour la vibration fondamentale avec $k = \frac{\pi}{L}$, ce qui donne

$$\omega = \pi\,c\,\sqrt{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{a^2}}$$

mais comme $L \gg a$, on tire $\omega \approx \pi\,c/a$, ce que nous avions trouvé plus haut. La longueur L n'est donc pas ici un paramètre pertinent.